

Kritische belastingen van stabiliteitselementen

Dit artikel beschrijft een eenvoudige methode voor het berekenen van de kritische belastingen van stabiliteitselementen in verdiepinggebouwen. Hiermee is het mogelijk naast de buigstijfheid van de constructie óók de afschuifstijfheid en de rotatiestijfheid van de fundering in rekening te brengen. De methode maakt gebruik van slechts drie individuele stijfheden die simpel worden gecombineerd tot één kritische belasting. De methode is het meest geschikt voor constructies met een uniforme geometrie over de hoogte van het gebouw en leent zich daardoor het best voor het voorontwerp. De uitkomsten verschillen maximaal 5% met een berekening met de eindige-elementenmethode^[1].

Een horizontale belasting op een verdiepinggebouw veroorzaakt uitbuiging van de stabiliteitselementen. Daarnaast kan de invloed van verticale belasting op de horizontale uitbuiging van belang zijn. Ook de initiële scheefstand, in combinatie met de verticale belasting, levert een bijdrage aan de horizontale uitbuiging. De excentriciteit van de verticale belastingen veroorzaakt additionele verplaatsingen en extra buigende momenten in de constructieve elementen. In het extreme geval kan dit tot bezwijken leiden. Meestal zijn de tweede-orde effecten klein en kunnen ze worden genegeerd. Indien deze effecten toch van belang zijn, kunnen ze in een tweede-orde berekening worden meegenomen óf kan met aangepaste doorsneden van de individuele elementen een tweede orde analyse worden vermeden^[2/3]. Hoe dan ook, het is in de meeste gevallen belangrijk om in een vroeg stadium te weten of het geselecteerde stabiliteitssysteem gevoelig is voor tweede-orde effecten of niet.

Kritische belasting

De gevoeligheid voor tweede-orde effecten in een constructie kan worden geschat met behulp van de kritische belasting, die meestal volgt uit een volledige knikberekening. Een dergelijke berekening kan tijdrovend en complex zijn. Het ligt daarom in de bedoeling hier een analytisch model te presenteren dat de ontwerper in staat stelt zowel de buigstijfheid EI en de

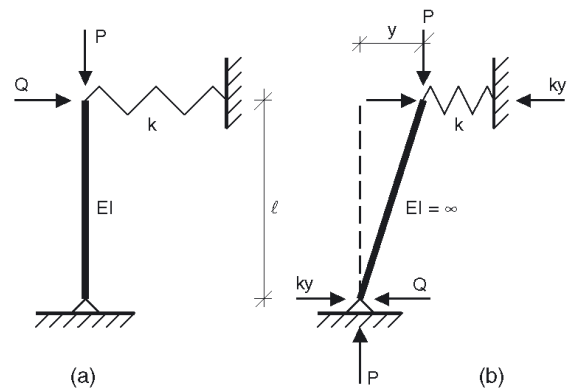
afschuifstijfheid GA van het stabiliteitselement alsmede de rotatiestijfheid C van de fundering op een eenvoudige manier in rekening te brengen bij het bepalen van de gecombineerde kritische belasting van een constructie. Voor de analyse van de constructie zijn de volgende aannamen gedaan:

- de geometrie en de stijfheden zijn uniform over de totale hoogte van het gebouw;
- de fundering kan worden gemodelleerd als een rotatieveer;
- het constructiemateriaal gedraagt zich lineair-elastisch;
- de verbindingen tussen de kolommen zijn scharnieren op elke verdieping.

Deze laatste aanname maakt de methode zeer geschikt voor vakwerken als verticale stabiliteitselementen. Eenvoudige formules voor het berekenen van de schuifstijfheid van verscheidene karakteristieke vakwerksystemen zijn bijvoorbeeld te vinden in [1/4/5/6]. De kolom in *afbeelding 1a*, met buigstijfheid EI, is scharnierend verbonden met de fundering en heeft bovenin een translatieveer met een stijfheid k. De belasting bestaat uit horizontale en verticale puntlasten Q en P die boven aangrijpen. Indien de veer als oneindig stijf wordt aangenomen is de kritische last de Eulerlast van een pendelkolom: $P_E = \pi^2 EI / \ell^2$. *Afbeelding 1b* toont een situatie waarbij de veer geen oneindige stijfheid bezit, dan is er even-

dr.ir. J.C.D. Hoenderkamp

Hans Hoenderkamp is universitair hoofddocent aan de Technische Universiteit Eindhoven Faculteit Bouwkunde, Constructief Ontwerpen. Hij verricht onderzoek naar ontwerpmethoden voor stabiliteitsconstructies voor hoogbouw.



1. Verend gesteunde pendelkolom.

wicht bij $Q\ell + Py = ky\ell$. De horizontale verplaatsing aan de top van de kolom is nu:

$$y = \frac{Q\ell}{k\ell - P\ell} \quad (1)$$

Instabiliteit treedt op wanneer de noemer nul is. De kritische belasting voor het systeem is dus:

$$P_{cr} = k\ell \quad (2)$$

Bij afwezigheid van de verticale belasting P , is de horizontale uitbuiging bovenin:

$$y_0 = \frac{Q}{k} \quad (3)$$

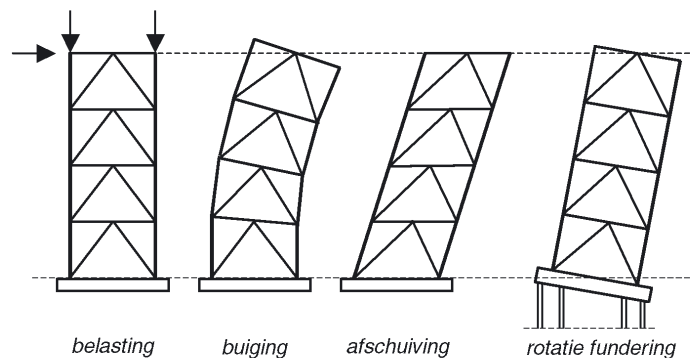
De horizontale verplaatsing van de kolom, inclusief het effect van de verticale belasting P , wordt verkregen door substitutie van formules (2) en (3) in formule (1):

$$y = \frac{k\ell}{k\ell - P} y_0 = \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P} y_0 \quad (4)$$

Indien nu wordt aangenomen dat $n = P_{cr}/P$ is het mogelijk de volgende vergelijking op te stellen voor de maximum horizontale uitbuiging van de constructie^[7]:

$$y = \frac{n}{n-1} y_0 \quad (5)$$

Door de eerste orde uitbuiging y_0 te vermenigvuldigen met de vergrotingsfactor $n/(n-1)$ kan de tweede-orde uitbuiging op eenvoudige wijze verkregen worden.



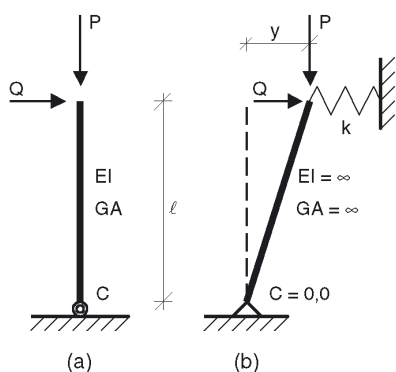
2. Vakwerk met puntlasten aan de top met bijbehorende vervormingen.

Conclusies

- De hier beschreven methode voor het berekenen van kritische belastingen maakt het mogelijk om – naast de buigstijfheid van een stabiliteitselement en de rotatiestijfheid van de fundering – ook de afschuifstijfheid van de constructie op eenvoudige wijze te gebruiken in de analyse.
- De gecombineerde kritische belasting stelt de ontwerper in staat op een snelle manier de tweede-orde effecten op de constructie te bepalen en de redelijkheid van computer analyses te toetsen.
- De methode is opgezet voor verdiepinggebouwen met een uniforme geometrie en uniforme stijfheden over de hoogte en is daardoor nauwkeuriger voor zulke constructies.
- Grote dakbelastingen hebben een significante invloed op de totale kritische belasting van de constructie en op de tweede-orde effecten.



foto: AVIQ



3. Modellen voor een kolom met puntlasten.

Voor het bepalen van de kritische belasting op het vakwerk worden nu de volgende drie situaties bekeken:

- puntlasten op dakniveau;
- gelijkmatig verdeelde belastingen;
- dakbelastingen.

Puntlasten op dakniveau

Het vakwerk in *afbeelding 2* toont vier K-verbanden over de hoogte. Het zou een stabiliteits-element kunnen zijn voor een fabriekshal, waarbij alleen verticale en horizontale belastingen aan de top aangrijpen. De afbeelding toont verder de vervormingen van het vakwerk onder een horizontale puntlast op dakniveau. Deze vervormingen ontstaan door: axiale rekken in de kolommen (buiging), axiale rekken in de diagonalen (afschuiving) en door rotatie van de fundering.

De constructie kan eenvoudig worden gemodelleerd door een enkele kolom en een rotatieveer. De kolom in *afbeelding 3a* heeft een buigstijfheid EI en een afschuifstijfheid GA. De constructie staat op een fundering met een rotatieveerstijfheid C. De belasting op de kolom is een verticale puntlast P en een horizontale puntlast Q.

De horizontale verplaatsing door last Q aan de top bestaat uit drie componenten: buiging en afschuiving in de kolom y_b en y_s , en een horizontale verplaatsing door rotatie van de fundering y_f . $y_0 = y_b + y_s + y_f$. Voor een horizontale puntlast aan de top wordt dit:

$$y_0 = \frac{Q\ell^3}{3EI} + \frac{Q\ell}{GA} + \frac{Q\ell^2}{C} \quad (6)$$

Afbeelding 3b toont een analoge constructie met een translatieveer als ondersteuning aan de top. Deze veer representeert de drie stijfheden van het gehele stabiliteits-element in *afbeelding 3a*. De stijfheid van de translatieveer is:

$$k = \frac{Q}{y_0} \quad (7)$$

Voor een pendelkolom met een translatieveer aan de top als ondersteuning is de kritische belasting van dit systeem:

$$P_{cr} = k\ell \quad (8)$$

Na substitutie van de formules (6) en (7) in formule (8) volgt een eenvoudige formule voor de kritische belasting van een vakwerkconstructie onderhevig aan puntlasten aan de top:

$$\frac{1}{P_{cr}} = \frac{\ell^2}{3EI} + \frac{1}{GA} + \frac{\ell}{C} \quad (9)$$

Deze vergelijking kan in een meer algemene vorm worden herschreven als een sommering van de individuele kritische belasting $P_{cr;b}$, $P_{cr;s}$ en $P_{cr;f}$ die de buiging, de afschuiving en de rotatie van de fundering vertegenwoordigen van het stabiliteitssysteem:

$$\frac{1}{P_{cr}} = \frac{1}{P_{cr;b}} + \frac{1}{P_{cr;s}} + \frac{1}{P_{cr;f}} \quad (10)$$

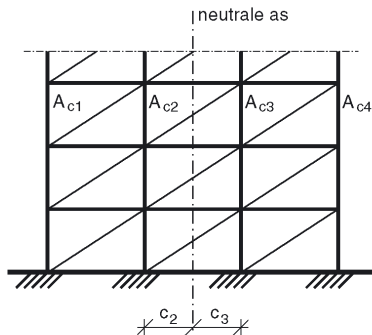
Een soortgelijke uitdrukking voor buiging en funderingsrotatie werd eerder gesuggereerd^[7]. De additionele kritische belasting voor afschuiving maakt het mogelijk om meerdere typen stabiliteits-elementen met een belangrijke afschuifvervormingscomponent op een eenvoudige manier te analyseren voor tweede orde effecten^[11].

De eerste term aan de rechterzijde in formule (9) is een benadering van de kritische belasting voor de buigingscomponent van de constructie:

$$P_{cr;b} = \frac{3EI}{\ell^2} \quad (11)$$

De kritische belasting voor een ingeklemde kolom met een buigstijfheid EI en een verticale puntlast aan de top is ongeveer 18% kleiner

4. Kolomplaatsingen in een vakwerk.



dan volgt uit formule (11). De exacte waarde voor een ingeklemde kolom is:

$$P_{\text{crb}} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} \quad (12)$$

Deze laatste waarde wordt nu gebruikt in formule (10) voor constructies met puntlasten aan de top.

Indien wordt aangenomen dat de kolommen van een vakwerk op elke verdieping scharnierend met elkaar zijn verbonden, kan de buigstijfheid van deze constructie op de volgende manier worden berekend:

$$EI = \sum EA_{ci} c_i^2 \quad (13)$$

Hierin is A_{ci} de oppervlakte van de doorsnede van de kolom en c_i de afstand tussen de neutrale as van de constructie en de kolom (afb. 4).

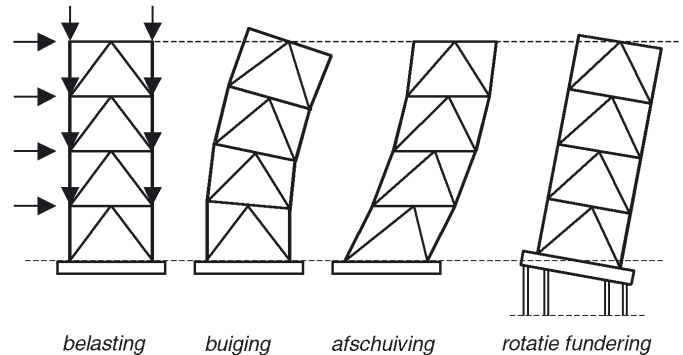
Gelijkmatig verdeelde belastingen

Bij verdiepinggebouwen worden in de ontwerpfasen zowel de verticale als de horizontale belastingen op vloerniveau aangebracht volgens afbeelding 5. In deze figuur zijn verder de horizontale verplaatsingen door buiging, afschuiving en rotatie van de fundering weergegeven.

Voor het ontwikkelen van een vereenvoudigde analytische methode om de kritische belasting te bepalen worden beide belastingen vervangen door gelijkmatig verdeelde verticale (f) en horizontale belastingen (q) over de gehele hoogte van de constructie. Afbeelding 6 toont de verdeelde belastingen op een enkele kolom met dezelfde stijfheden als de werkelijke constructie, geplaatst op een rotatieveer met dezelfde rotatiestijfheid als de fundering. De totale verticale belasting op het stabiliteitselement wordt dan $F = f\ell$ met ℓ als totale hoogte van de constructie.

Analoog aan de situatie met de puntlasten aan

5. Vakwerk met gelijkmatig verdeelde belastingen en bijbehorende vervormingen.



de top is de maximale horizontale verplaatsing door buiging van de constructie onderhevig aan een gelijkmatig verdeelde horizontale belasting q in de nieuwe situatie:

$$y_b = \frac{q\ell^4}{8EI} \quad (14)$$

De verplaatsing aan de top door afschuiving (rek in de diagonalen) is:

$$y_s = \frac{q\ell^2}{2GA} \quad (15)$$

en voor de rotatie van de fundering:

$$y_f = \frac{q\ell^3}{2C} \quad (16)$$

Analoog aan formule (9) wordt de kritische belasting voor het stabiliteitselement onder een gelijkmatig verdeelde horizontale belasting^[11]:

$$\frac{1}{F_{\text{cr}}} = \frac{\ell^2}{8EI} + \frac{1}{2GA} + \frac{\ell}{2C} \quad (17)$$

In algemene vorm kan dit als volgt worden herschreven:

$$\frac{1}{F_{\text{cr}}} = \frac{1}{F_{\text{crb}}} + \frac{1}{F_{\text{crs}}} + \frac{1}{F_{\text{crf}}} \quad (18)$$

De eerste term aan de rechterzijde van formule (17) geeft een benadering van de kritische last van de buigingscomponent van de constructie:

$$F_{\text{crb}} = \frac{8EI}{\ell^2} \quad (19)$$

De exacte waarde van de kritische belasting voor een ingeklemde kolom met een buigstijfheid EI en een gelijkmatig verdeelde verticale belasting^[8] is ongeveer 2% kleiner dan volgens formule (19).

$$F_{\text{crb}} = \frac{7,837EI}{\ell^2} \quad (20)$$

Dakbelastingen

In de berekeningen van de kritische lasten is aangenomen dat de verticale vloerbelastingen vervangen kunnen worden door een gelijkmatig verdeelde verticale belasting. Dit is uitsluitend correct indien de belasting op het dak de helft bedraagt van de typische vloerbelasting. Indien de dakbelasting groter is dan de halve vloerbelasting, is de vervangende gelijkmatig verdeelde verticale belasting in afbeelding 7a minder dan de totale verticale belasting gedeeld door de hoogte van het gebouw. Dit heeft tot gevolg dat de in formule (17) gegeven kritische belastingen te groot zijn. Deze waarden kunnen echter worden aangepast via reductiefactoren voor de individuele stijfheden van de stabiliteitsconstructie.

De verticale belasting op het dak is $F_d = \gamma F_v$. Hierin is F_v de verticale vloerbelasting per verdieping.

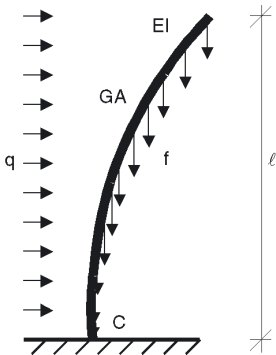
De verticale belasting op de constructie die kan worden omgezet tot een gelijkmatig verdeelde belasting $F = sF_v$. Hierin is s het aantal verdiepingen in het gebouw. De vervangende gelijkmatig verdeelde verticale belasting voor de analyse is dan $f = F/\ell$.

Deze belasting f (afb. 7b) is minder dan de totale verticale belasting op het gebouw. Naast de verdeelde belasting moet er nog een extra puntlast boven op de kolom worden gezet. Deze last is aangegeven door het gearceerde gedeelte in afbeelding 7a en apart in afbeelding 7c en bedraagt:

$$P = F_d - \frac{1}{2}F_v = \frac{F}{s}(\gamma - 0,5) \quad (21)$$

De werkelijke kritische belasting voor afschuiving van een verdiepingenconstructie is dus een combinatie van de kritische belastingen voor een gelijkmatig verdeelde belasting en een puntbelasting.

6. Eénzijdige ingeklemde kolom met gelijkmatig verdeelde belastingen.



Buiging

Volgens Dunkerley's theorema^[9/10] kan de volgende combinatie voor de kritische belasting van de buigcomponent worden gebruikt:

$$\frac{F}{F_{crb}} + \frac{P}{P_{crb}} = 1 \quad (22)$$

Volgens de klassieke theorie in de formules (12) en (20) is de verhouding tussen de kritische belastingen voor gelijkmatig verdeelde belastingen en puntlasten aan de top als volgt:

$$\frac{F_{crb}}{P_{crb}} = \frac{7,837EI}{\ell^2} \cdot \frac{4\ell^2}{\pi^2 EI} = 3,716 \quad (23)$$

Substitutie van formules (21) en (23) in (22) leidt tot:

$$\frac{F}{F_{crb}} \left(1 + \frac{3,716(\gamma - 0,5)}{s} \right) = 1 \quad (24)$$

Hieruit volgt een reductiefactor voor de kritische belasting voor buiging van een stabiliteits-element met gelijke verticale vloerbelastingen en een afwijkende dakbelasting:

$$\frac{F}{F_{crb}} = \frac{s}{s + 1,588(2\gamma - 1)} = \alpha \quad (25)$$

Wanneer de dakbelasting de helft bedraagt van de vloerbelasting, dan geldt $\gamma = 0,5$ en wordt $\alpha = 1,0$. Het is dan niet nodig een aparte puntlast aan de top te beschouwen. Dit is de situatie zoals beschreven bij 'gelijkmatig verdeelde belastingen'. Bij $\gamma = 1,0$ volgt een formule voor α die al eerder is gepubliceerd^[10].

De kritische belasting voor buiging kan nu meer algemeen als volgt worden herschreven:

$$F_{crb} = \frac{7,837\alpha EI}{\ell^2} \quad (26)$$

Rekenvoorbeeld

Gegeven is een plattegrond en de fundering van een verdiepinggebouw met een staalskelet met twaalf verdiepingen (zie afbeelding). De verdiepinghoogte bedraagt 3,2 m. De totale hoogte van het gebouw $H = 38,4$ m.

De gelijkmatig verdeelde windbelasting bedraagt $1,0$ kN/m², de volumieke massa van het gebouw $\rho = 150$ kg/m³ en de veerconstante van één funderingspaal $k = 100$ kN/mm. Voor staal geldt $E = 210 \cdot 10^6$ kN/m².

De vier kernen (stabiliteitselementen) bestaan uit enkelbeukige vakwerken met K-verbanden volgens tabel 1.

Gevraagd wordt de twee-orde horizontale uitbuiging voor de volgende twee situaties:

- de dakbelasting is de helft van de vloerbelasting, dus $\alpha = \beta = 1,0$;
- de dakbelasting is tweemaal de vloerbelasting, $\gamma = 2,0$ en

$$\alpha = \frac{s}{s + 1,588(2\gamma - 1)} = \frac{12}{12 + 1,588(2 \cdot 2,0 - 1)} = 0,7158$$

$$\beta = \frac{s}{s + 2\gamma - 1} = \frac{12}{12 + 2 \cdot 2,0 - 1} = 0,8000$$

De resultaten voor de hoge dakbelasting worden telkens tussen haakjes gegeven.

De lengte van de diagonalen in het vakwerk volgt uit:

$$a = \sqrt{3,2^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 5,4\right)^2} = 4,19 \text{ m}$$

De buigstijfheid van het vakwerk volgt uit formule (13):

$$EI = E \sum A_d c_i^2 = 210 \cdot 10^6 \left(2 \cdot 27,0 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5,4\right)^2 \right) = 8,267 \cdot 10^7 \text{ kNm}^2$$

De afschuifstijfheid van een vakwerk met een K-verband staat onder meer in [5]:

$$GA = \frac{a^2 h E}{\frac{2d^3}{A_d} + \frac{a^3}{4A_b}} = \frac{5,4^2 \cdot 3,2 \cdot 210 \cdot 10^6}{\frac{2 \cdot 4,19^3}{3,55 \cdot 10^{-3}} + \frac{5,4^3}{4 \cdot 10,6 \cdot 10^{-3}}} = 4,348 \cdot 10^5 \text{ kN}$$

Hierin is:

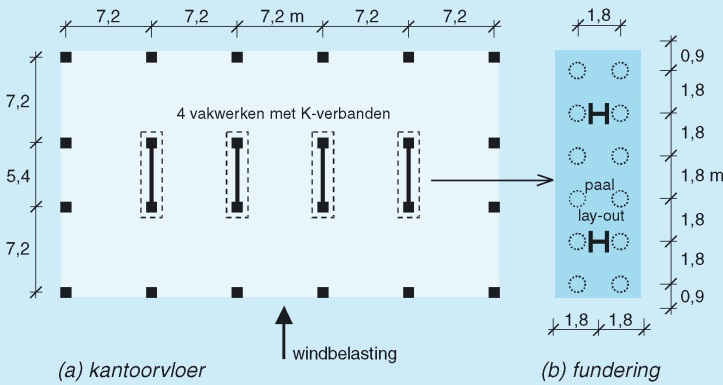
- a breedte van het vakwerk;
- h verdiepinghoogte;
- d lengte van de diagonaal;
- A_d doorsnede van de diagonaal;
- A_b doorsnede van de ligger.

De rotatieveerstijfheid van de fundering wordt bepaald volgens^[7]:

$$C = k \sum d^2 = 100 \cdot 10^3 \left(4 \cdot \left(0,9^2 + 2,7^2 + 4,5^2 \right) \right) = 1,134 \cdot 10^7 \text{ kNm}$$

Hierin is d de afstand tussen een funderingspaal en de neutrale as van de paalgroep.

Plattegronden van de kantoorvloer en de fundering.



Tabel 1. Gegevens van de stabiliteitselementen

element	profiel	A (m ²)	I (m ⁴)
kolom	HEB 600	27,0 · 10 ⁻³	1,71 · 10 ⁻³
ligger	HEB 240	10,6 · 10 ⁻³	112,6 · 10 ⁻⁶
diagonaal	120x120x8	3,55 · 10 ⁻³	7,38 · 10 ⁻⁶

Met bovenstaande gegevens zijn de individuele kritische belastingen dan:

$$\text{buiging } F_{cr,b} = \frac{7,837EI}{H^2} = \frac{7,837 \cdot 8,267 \cdot 10^7}{38,4^2} = 4,394 \cdot 10^5 \text{ kN } (3,145 \cdot 10^5)$$

$$\text{afschuiving } F_{cr,s} = 2GA = 2 \cdot 4,348 \cdot 10^5 = 8,696 \cdot 10^5 \text{ kN } (6,957 \cdot 10^5)$$

$$\text{fundering } F_{cr,f} = \frac{2C}{H} = \frac{2 \cdot 1,134 \cdot 10^7}{38,4} = 5,906 \cdot 10^5 \text{ kN } (4,725 \cdot 10^5)$$

De gecombineerde kritische belasting van het stabiliteitselement volgt uit formule (18) en (34):

$$F_{cr} = \frac{1}{\frac{1}{F_{cr,b}} + \frac{1}{F_{cr,s}} + \frac{1}{F_{cr,f}}} = \frac{1}{\frac{1}{4,394 \cdot 10^5} + \frac{1}{8,696 \cdot 10^5} + \frac{1}{5,906 \cdot 10^5}} = 1,954 \cdot 10^5 \text{ kN } (1,485 \cdot 10^5)$$

De totale verticale belasting (inclusief pendelkolommen) op een enkel stabiliteitselement is:

$$F = \frac{1}{4} (\text{ lengte} \cdot \text{ breedte} \cdot \text{ hoogte}) \rho \cdot 10^{-2} = \frac{1}{4} (5 \cdot 7,2) \cdot (7,2 + 5,4 + 7,2) \cdot (38,4) \cdot 150 \cdot 10^{-2} = 1,043 \cdot 10^4 \text{ kN } (1,130 \cdot 10^4)$$

Om een vergrotingsfactor te bepalen wordt eerst 'n' berekend:

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{1,954 \cdot 10^5}{1,043 \cdot 10^4} = 18,73 \quad (13,14)$$

De vergrotingsfactor is hiermee:

$$\frac{n}{n-1} = \frac{18,73}{18,73-1} = 1,056 \quad (1,082)$$

Het tweede-orde effect op de gegeven constructie is dus 5,6%. De extra dakbelasting vergroot dit effect tot 8,2%. Dit betekent derhalve een vermeerdering van 46%!

Indien uitsluitend de buigcomponent zou worden gebruikt in de berekeningen dan bedraagt het tweede-orde effect 2,4%. De situatie waarin buiging en rotatie van de fundering worden gecombineerd levert een effect op van 4,3%.

De windbelasting per stabiliteitselement is $q = 1,0 \cdot 5 \cdot 7,2 / 4 = 9,0$ kN/m. Voor de eerste-orde verplaatsing op dakhöhe wordt hiermee gevonden:

$$\text{buiging vakwerk } y_b = \frac{qH^4}{8EI} = \frac{9,0 \cdot 38,4^4}{8 \cdot 8,267 \cdot 10^7} = 0,02959 \text{ m}$$

$$\text{afschuiving vakwerk } y_s = \frac{qH^2}{2GA} = \frac{9,0 \cdot 38,4^2}{2 \cdot 4,348 \cdot 10^5} = 0,01526 \text{ m}$$

$$\text{rotatie fundering } y_f = \frac{MH}{C} = \frac{qH^3}{2C} = \frac{9,0 \cdot 38,4^3}{2 \cdot 1,134 \cdot 10^7} = 0,02247 \text{ m}$$

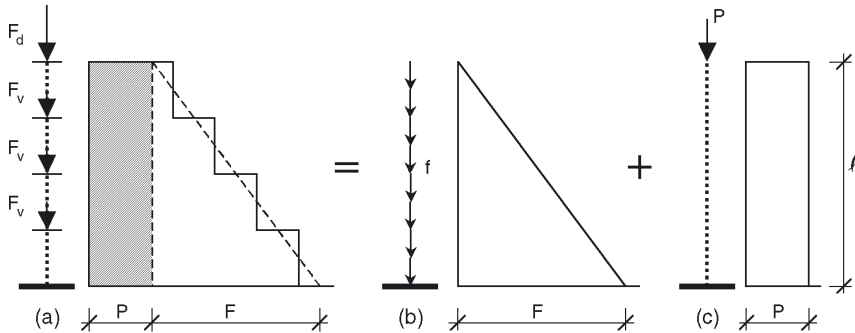
De scheefstand van het gebouw is:

$$\psi_1 = \frac{y_b + y_s + y_f}{H} = \frac{0,02959 + 0,01526 + 0,02247}{38,4} = 1,753 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Bij het berekenen van de tweede-orde uitbuigingen moet ook de initiële scheefstand van het vakwerk worden meegenomen. Voor een hoogbouw met twaalf verdiepingen is dit 1 op 400 of 2,50%. Gevonden wordt dan:

scheefstand door wind	1,753 ‰
initiële scheefstand	2,500 ‰
totale eerste-orde scheefstand	4,253 ‰
tweede orde effect (= 0,056 · 4,253)	0,238 ‰ (0,349)
totale scheefstand	4,491 ‰ (4,602)
elastische uitbuiging (= 4,491 – 2,500)	1,991 ‰ (2,102)

7. Verticale gebouwbelastingen.



Afschuiving

Voor het bepalen van de invloed van afwijkende dakbelastingen op de kritische belasting voor afschuiving kan dezelfde redenering worden gebruikt als voor buiging. Volgens de klassieke theorie in de formules (9) en (17) voor de afschuifcomponenten is de verhouding tussen de kritische belastingen voor gelijkmatig verdeelde belastingen en puntlasten aan de top als volgt:

$$\frac{F_{crs}}{P_{crs}} = \frac{2GA}{GA} = 2,0 \quad (27)$$

Na substitutie van de formules (21) en (27) in een Dunkerley-sommering (formule (22)) volgt voor afschuiving:

$$\frac{F}{F_{crs}} \left(1 + \frac{2,0(\gamma - 0,5)}{s} \right) = 1 \quad (28)$$

Analoog is de reductiefactor voor de kritische belasting voor afschuiving van een stabiliteitselement met gelijke verticale vloerbelastingen en een afwijkende dakbelasting:

$$\frac{F}{F_{crs}} = \frac{s}{s + 2\gamma - 1} = \beta \quad (29)$$

Ook hier geldt dat wanneer de dakbelasting de helft is van de vloerbelasting: $\gamma = 0,5$ en $\gamma = 1,0$. Het is dan niet nodig een aparte puntlast aan de top te beschouwen. Dit is de situatie zoals beschreven bij 'gelijkmatig verdeelde belastingen'. De vergelijking voor de kritische belasting voor afschuiving in een algemene vorm is nu:

$$F_{crs} = 2\beta GA \quad (30)$$

Rotatie van de fundering

Bijna identiek aan de berekening van de kriti-

sche belasting voor afschuiving wordt ook de gereduceerde kritische belasting voor de rotatiecomponent van de fundering bepaald. Nu is:

$$\frac{F_{crf}}{P_{crf}} = \frac{\frac{2C}{\ell}}{\frac{C}{\ell}} = 2,0 \quad (31)$$

en dus geldt ook dezelfde reductiefactor voor de rotatie van de fundering:

$$\frac{F}{F_{crf}} = \frac{s}{s + 2\gamma - 1} = \beta \quad (32)$$

De algemene vergelijking voor de kritische belasting voor funderingrotatie van een constructie wordt nu:

$$F_{crf} = \frac{2\beta C}{\ell} \quad (33)$$

Totale kritische belasting

Voor de berekening van de totale kritische belasting van een gebouw met een gelijkmatig verdeelde horizontale belasting, met gelijke vloerbelastingen en een afwijkende dakbelasting kan nu de volgende vergelijking worden gebruikt:

$$\frac{1}{F_{cr}} = \frac{\ell^2}{7,837\alpha EI} + \frac{1}{2\beta GA} + \frac{\ell}{2\beta C} \quad (34)$$

Deze vergelijking is verkregen door de formules (26), (30) en (33) in de basisformule (18) te substitueren. De factor n wordt nu:

$$n = \frac{F_{cr}}{F} \quad (35)$$

Deze factor kan worden gebruikt in formule (5) om de tweede-orde verplaatsingen in constructies te bepalen. De vergrotingsfactor $n/(n-1)$ mag ook worden gebruikt bij de berekening van het tweede-orde buigende moment in de rotatieveer.

Literatuur

1. J.C.D. Hoenderkamp, 'Critical loads of lateral load resisting structures for tall buildings', *The Structural Design of Tall Buildings* 11 (2002) 12. Nog niet gepubliceerd.
2. D. Nixon, D. Beaulieu en P.F. Adams, 'Simplified second order frame analysis', *Canadian Journal of Civil Engineering* 2 (1975) 4, p. 602-605.
3. A. Rutenberg, 'Simplified P-Delta analysis for asymmetric structures', *Journal of the Structural Division* 108 (1982) 9, p. 1995-2013.
4. B. Stafford Smith en A. Coull, *Tall building structures. Analysis and design*, New York 1991.
5. P.W.M. Schroijen, H.H. Snijder en J.C.D. Hoenderkamp, 'Effectief traagheidsmoment van samengestelde staven (1)', *Bouwen met Staal* 33 (2000) 157, p. 50-56.
6. K.A. Zalka, 'Full-height buckling of frameworks with cross-bracing', *Structures & Buildings* 134 (1999) May, p. 181-191.
7. D. Dicke, *Stabiliteit voor ontwerpers*, Delft 1991.
8. S. Timoshenko en J. Gere, *Theory of elastic stability*, New York 1961 (2e druk).
9. S. Dunkerley, 'On the whirling and vibration of shafts', *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Ser. A (1894) 185, p. 279-360.
10. K.A. Zalka, *Global structural analysis of buildings*, London 2000.